Вторник, 10 июля 2012 г.

Задача 1. Дан треугольник ABC; точка J является центром вневписанной окружности, соответствующей вершине A. Эта вневписанная окружность касается отрезка BC в точке M, а прямых AB и AC — в точках K и L соответственно. Прямые LM и BJ пересекаются в точке F, а прямые KM и CJ пересекаются в точке G. Пусть S — точка пересечения прямых AF и BC, а T — точка пересечения прямых AG и BC.

Докажите, что точка M является серединой отрезка ST.

(*Вневписанной окружностью* треугольника ABC, соответствующей вершине A, называется окружность, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC.)

Задача 2. Дано целое число $n \geq 3$ и действительные положительные числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ такие, что $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n \ > \ n^n.$$

Задача 3. Два игрока A и B играют в игру *Угадай-ка*. Правила этой игры зависят от двух положительных целых чисел k и n, и эти числа известны обоим игрокам.

В начале игры A выбирает целые числа x и N такие, что $1 \leq x \leq N$. Игрок A держит число x в секрете, а число N честно сообщает игроку B. После этого игрок B пытается получить информацию о числе x, задавая игроку A вопросы следующего типа: за один вопрос B указывает по своему усмотрению множество S, состоящее из целых положительных чисел (возможно, это множество уже было указано в одном из предыдущих вопросов) и спрашивает игрока A принадлежит ли число x множеству S. Игрок B может задать столько вопросов, сколько он хочет. На каждый вопрос игрока B игрок A должен сразу ответить *да* или *нет*, при этом ему разрешается соврать столько раз, сколько он хочет; единственное ограничение состоит в том, что из любых $k+1$ подряд идущих ответов хотя бы один ответ должен быть правдивым.

После того, как B задаст столько вопросов, сколько он сочтет нужным, он должен указать множество X, содержащее не более n целых положительных чисел. Если x принадлежит множеству X, то игрок B выиграл; иначе B проиграл. Докажите, что:

1. Если $n \geq 2^k$, то B может гарантировать себе выигрыш.

2. Для всякого достаточно большого k найдется целое число $n \geq 1,99^k$, при котором игрок B не сможет гарантировать себе выигрыш.

Среда, 11 июля 2012 г.

Задача 4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что для любых целых чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $a+b+c=0$, выполняется равенство:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Через $\mathbb{Z}$ обозначено множество всех целых чисел.)

Задача 5. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle BCA = 90^\circ$, и пусть D — основание высоты, проведенной из вершины C. Внутри отрезка CD взята точка X. Пусть K — точка, лежащая на отрезке AX такая, что $BK = BC$. Аналогично, пусть L — точка, лежащая на отрезке BX такая, что $AL = AC$. Пусть M — точка пересечения отрезков AL и BK.

Докажите, что $MK = ML$.

Задача 6. Найдите все целые положительные числа n, для которых существуют целые неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов